

## ЛЕКЦІЯ №2. СТАТИЧНІ НЕСТІЙКОСТІ

### 2.1. Втрата стійкості стиснутого стержня

Спочатку розглянемо найпростіші приклади, в яких система має лише одну стійку точку, але при різних значеннях зовнішнього параметра вона різна. При певному критичному значенні зовнішнього параметра стійка стаціонарна точка стає нестійкою, одночасно виникає нова стійка точка й система переходить у новий стан. При цьому змінюються властивості системи, зокрема, вигляд функціональної залежності параметрів системи від зовнішніх параметрів.

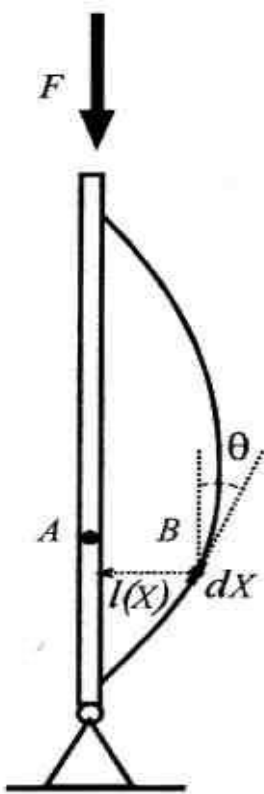


Рис 2.1.  
Деформація  
стержня

Перша задача про виникнення нестійкості при зміні зовнішніх параметрів була розв'язана Ейлером. Для визначення рівноважних конфігурацій стиснутої пружної колони Ейлер застосував розвинене ним варіаційне числення. При малих вертикальних навантаженнях на колону форма колони не змінюється, колона лише трохи стискується (рис.2.1). При навантаженнях, більших за деяке критичне значення, форма колони різко змінюється. Нестійкість і перехід з одного стану в інший у даній задачі мають місце в термодинамічно рівноважній системі, а параметри системи визначаються з мінімуму потенційної енергії. Тому фактично явище стосується рівноважних систем, а не нерівноважних, яким присвячена дана монографія. Ми дослідимо його для того, щоб показати існування аналогії між переходами з одного стану в інший у рівноважних і нерівноважних стержнях системах. Крім того, для розв'язування задачі буде продемонстровано варіаційний метод, який часто використовується для визначення розв'язків диференціальних рівнянь, зокрема при вивченні нерівноважних систем.

Розглянемо стержень довжиною  $L$ , який шарнірно-опертий і знаходиться під дією сили  $F$ , спрямованої вздовж осі стержня (рис.2.1). Стержень вважатимемо таким, що не розтягується. Припустимо, що відбувається деформація стержня, при цьому точка  $A$  переходить у точку  $B$ . Оскільки

стержень вигинається, мають місце поздовжнє і поперечне зміщення точок стержня. Виникає питання, при яких навантаженнях і яким за величиною утворюється поперечне зміщення стержня залежно від навантаження. Поперечне зміщення залежить від координати точки вздовж осі стержня  $X$ , позначимо його  $l(X)$ . Потенційна енергія деформованого стержня визначається енергією вигину й роботою, виконаною зовнішньою силою на поздовжнє зміщення стержня  $\Delta L$ . Залежність  $l(X)$  у стані рівноваги знаходиться з мінімуму потенційної енергії системи.

З механіки відомо, що енергія деформації вигину елемента стержня довжиною  $dX$  становить:

$$dU = \frac{1}{2} M \chi dX \quad (2.1)$$

де  $M = EI \chi$  — згинаючий момент;  $E$  — модуль Юнга;  $I$  — момент інерції поперечного перерізу;  $\chi = d\theta/dX$  — швидкість зміни кута нахилу дотичної до стержня осі. Згідно з рис. 2.1. маємо

$$\chi = \frac{d}{dX} \left( \arcsin \frac{dl(X)}{dX} \right) = \frac{l''}{(1-l'^2)^{1/2}}. \quad (2.2)$$

Із співвідношень (2.1), (2.2) для енергії вигину отримаємо вираз

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \chi^2 dX = \frac{1}{2} EI \int_0^L \frac{(l'')^2}{(1-l'^2)} dX. \quad (2.3)$$

Згідно з рис. 2.1 зміна елемента поздовжніх розмірів становитиме:

$$dL = (dX^2 - dl^2)^{1/2} = dX (1-l'^2)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Зміна поздовжніх розмірів стержня визначається формулою:

$$\Delta L = L - \int_0^L (1-l'^2)^{1/2} dX. \quad (2.5)$$

Повна потенційна енергія стержня

$$V = U - F \Delta L = \frac{1}{2} EI \int_0^L \frac{(l'')^2}{(1-l'^2)} dX - F \left( L - \int_0^L (1-l'^2)^{1/2} dX \right). \quad (2.6)$$

Вираз (2.6) є функціоналом, тобто  $V$  залежить від вигляду залежності  $l(X)$ . У системі реалізується така функція  $l(X)$ , яка зумовлює мінімальне значення  $V$ . При цьому повинні виконуватись граничні умови: на кінцях стержня поперечні зміщення відсутні —  $l(0) = l(L) = 0$ . Розкладемо  $l(X)$  у ряд Фур'є:

$$l(X) = \sum_n Q_n \sin \frac{\pi X}{L}, \quad (2.7)$$

де  $n$  — цілі числа,  $n = 1, 2, \dots$ . Функція (2.7) вже задовольняє граничним умовам.

Очевидно, при малих поперечних вигинах стержня в сумі по  $n$  у (2.7) будуть максимальними члени з малими значеннями  $n$ , оскільки доданки з великими  $n$  дають значний внесок у  $V$  (2.6) (через наявність другої похідної від  $l(X)$ ). Тому обмежимося в сумі формули (2.7) одним членом, тобто представимо  $l(X)$  у вигляді

$$l(X) = Q_1 \sin \frac{\pi X}{L}. \quad (2.8)$$

За фізичним змістом величина  $Q_1$  є поперечним зміщенням в центрі стержня.

Розглядаючи явище поблизу порога нестійкості, коли поперечні зміщення стержня є малими ( $l' \ll l$ ), у формулі (2.6) можна провести розклад за степенями  $l'^2$ , обмежившись членами нульового і першого порядку. Тоді з (2.6) випливає

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^L (l''^2 + l''^2 l'^2) dX - \frac{F}{2} \int_0^L (l'^2 + \frac{1}{4} l'^4) dX. \quad (2.9)$$

Підставивши в цю формулу залежність  $l(X)$  у вигляді (2.8), після нескладних розрахунків матимемо:

$$V = \frac{1}{4} EI \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 L Q_1^2 + \frac{1}{16} EI \left( \frac{\pi}{L} \right)^6 L Q_1^4 - F \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 L Q_1^2 + \frac{3}{64} \left( \frac{\pi}{L} \right)^6 L Q_1^4 \right]. \quad (2.10)$$

У стані рівноваги

$$\frac{\partial V}{\partial Q_1} = 0. \quad (2.11)$$

Мінімізуючи (2.10) по  $Q_1$  отримаємо рівняння

$$Q_1 \left\{ F_c - F + Q_1^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 EI - \frac{3}{4} F \right] \right\} = 0, \quad (2.12)$$

де

$$F_c = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 EI. \quad (2.13)$$

Рівняння (2.12) має два розв'язки:

$$1) Q_1 = 0;$$

$$2) Q_1 = \left( \frac{F - F_c}{\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 EI - \frac{3}{4} F \right)} \right)^{1/2} = \left( \frac{F - F_c}{\frac{1}{8} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 F_c} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Перший розв'язок реалізується при  $F < F_c$ , другий при  $F > F_c$ . У разі навантажень  $F < F_c$  стержень не має бокових зміщень, якщо виконується

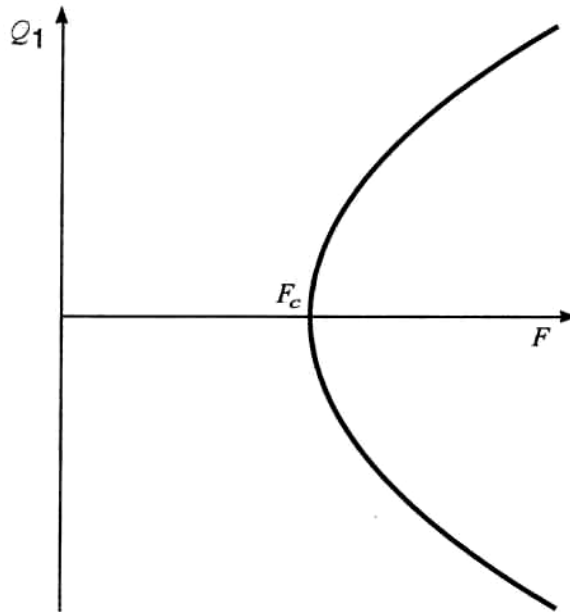


Рис. 2.2. Залежність поперечного зміщення стержня від прикладеної сили

умова  $F > F_c$ , бокові відхилення зростають зі збільшенням навантаження. Залежність поперечного зміщення від навантаження наведена на рис. 2.2. У точці  $F = F_c$  змінюється характер залежності  $Q$  від  $F$ , при  $F < F_c$  величина  $Q$  не

залежить від  $F$ , при  $F > F_c$  реалізується коренева залежність. Таким чином, точка  $F = F_c$  є точкою біфуркації даної задачі.

## 2.2. Лазерна генерація

У разі виникнення лазерної генерації відбувається перебудова характеру випромінювання електромагнітних хвиль: від випадкового до когерентного. Розглянемо спрощену модель виникнення генерації. Для більш докладного ознайомлення див. монографію Хакена [1].

Виділимо два електронних рівня атома: 1 і 2 (рис. 2.3). Перехід електрона з верхнього рівня 2 на нижній 1 з випромінюванням може відбуватися як спонтанно, так і під дією вже існуючого електромагнітного випромінювання (таке випромінювання називається вимушеним).

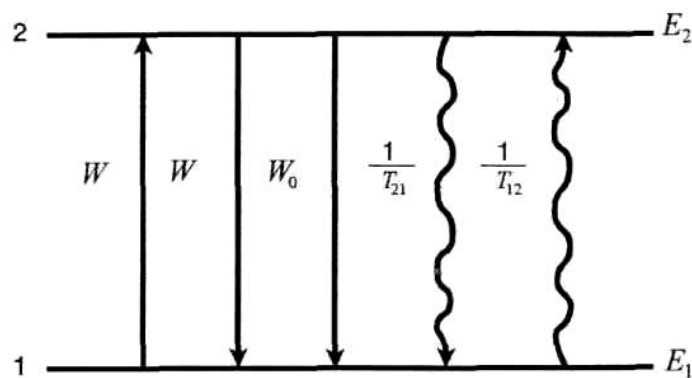


Рис. 2.3. Переходи в системі з двома електронними рівнями

При вимушеному випромінюванні частота коливань електромагнітного поля, його поляризація і напрямок поширення випромінювання збігаються з відповідними величинами фотона випромінювання. Можливе також вимушене поглинання з переходом електрона зі стану 1 у стан 2. У разі вимушеного поглинання число квантів електромагнітного випромінювання (фотонів) зменшується на одиницю. Імовірності вимушених процесів випромінювання і поглинання при однаковій кількості початкових фотонів збігаються. Крім розглянутих процесів спостерігаються переходи між рівнями, в яких електромагнітне поле не бере участі (безрадіаційні переходи). У цьому разі при переході електрона з рівня 2 на рівень 1 енергія електронного збудження переходить у теплову енергію. При переході електрона з рівня 1 на рівень 2

енергія відбирається з резервуара. Імовірність останніх переходів ( $1 \rightarrow 2$ ) сильно залежить від температури. Для типових значень відстаней між електронними рівнями ( $-1\text{eV}$ ) та при кімнатних температурах ( $kT \sim 2.5 \cdot 10^{-2} \text{eV}$ ) вона є надто малою. Зазначені вище переходи у дворівневій системі зображено на рис. 2.3.

За звичайних умов електрони з великою імовірністю знаходяться в нижчому стані. Припустимо, що деяким зовнішнім джерелом створено стан, в якому верхні рівні заселені більше, ніж нижні (тобто створена інверсна заселеність). Таким джерелом може бути, наприклад, світловий потік, що збуджує більш високі атомні рівні, а потім внаслідок процесів релаксації електрони опиняються на рівні 2. Фотони в такому середовищі з інверсною заселеністю атомних рівнів будуть з більшою імовірністю викликати переходи від верхнього рівня на нижній, ніж з нижнього на верхній (оскільки верхніх заселених рівнів більше). Причому при кожному такому переході буде народжуватися фотон, що матиме такі ж частоту і напрямок поширення, які має фотон, що вимушує це випромінювання. При деякому перезаселенні верхніх рівнів (при деякій інверсії) система стає нестійкою відносно генерації когерентного випромінювання, коли всі атоми випромінюють однакові фотони. Напрямок випромінювання визначається параметрами системи (геометрією). Принципову схему лазера наведено на рис. 3. Зовнішнє накачування створює інверсне заселення. Дзеркала, які відбивають електромагнітне випромінювання, сприяють накопиченню фотонів в системі. Через певний отвір випромінювання можна вивести з лазера.

Позначимо число атомів, які знаходяться в стані 1, через  $N_1$ , число атомів у збудженому стані 2 — через  $N_2$ , густину енергії електромагнітного випромінювання позначимо  $U$ . Як ми вже зазначали, до існування позитивного зворотного зв'язку в даній системі зумовлює вимушене випромінювання: випадкове збільшення числа фотонів стимулює переходи  $2 \rightarrow 1$ , що в свою чергу приводить до росту числа фотонів. Тому для уникнення громіздких викладок спонтанним випромінюванням будемо нехтувати.

Залежність від часу  $N_1, N_2, U$  визначається з таких кінетичних рівнянь:

$$\frac{dN_1}{dt} = -K + W(N_2 - N_1) - \frac{N_1}{T_{12}} + \frac{N_2}{T_{21}}, \quad (2.15)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = K + W(N_1 - N_2) - \frac{N_2}{T_{21}} + \frac{N_1}{T_{12}}, \quad (2.16)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{\tau} + W(N_2 - N_1)\Delta E, \quad (2.17)$$

де перший член в рівняннях (2.15) і (2.16) описує зміну числа атомів у стані 1 (2), зумовлену накачуванням, другий — зміну, зумовлену вимушеними переходами;  $W$  — імовірність вимушеного переходу електрона зі стану 1 у стан 2, і навпаки, (як уже підкреслювалося для вимушених переходів ці імовірності збігаються). Імовірність вимушеного переходу залежить від числа фотонів і, отже, від енергії електромагнітного поля і може бути представлена у вигляді

$$W = BU, \quad (2.18)$$

де величина  $B$  — коефіцієнт Ейнштейна для вимушеного випромінювання. Інші величини, що входять в рівняння (2.15)—(2.17), визначаються так:  $\Delta E = E_2 - E_1$ ;  $T_{12}$  і  $T_{21}$  — часи безрадіаційних переходів електрона з рівня 1 на рівень 2, і навпаки;  $\tau$  — час затухання електромагнітного поля в резонаторі внаслідок його поглинання середовищем.

Нелінійними доданками, які зумовлюють існування біфуркації, є другі доданки в рівняннях (2.15), (2.16), які описують імовірності вимушених переходів.

Із співвідношень (2.15) і (2.16) випливає, що при даному способі накачування  $N_1 + N_2 = N = \text{const}$ , де  $N$  — число атомів у системі. Введемо змінну  $n = N_2 - N_1$ . Тоді, віднімаючи від рівняння (2.16) рівняння (2.15), систему рівнянь (2.15)—(2.17) можна переписати у вигляді системи двох рівнянь (третє рівняння приводить до умови  $N_1 + N_2 = \text{const}$ :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n - n^{(e)}}{T} - 2BnU \quad (2.19)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{\tau} + B\Delta EUn, \quad (2.20)$$

де  $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_{21}} + \frac{1}{T_{12}}$ ;  $n^{(e)} = \left( 2K - N \left( \frac{1}{T_{21}} - \frac{1}{T_{12}} \right) \right)$   $T$  – величина, яка називається

інверсією. Вона дорівнює різниці заселеностей рівнів  $(N_2 - N_1)$  за відсутності електромагнітного випромінювання. Оскільки  $T_{21} \ll T_{12}$ , то за відсутності накачування ( $K = 0$ ) маємо  $n^{(e)} < 0$ , тобто нижні рівні заселені більше, ніж верхні.

Стаціонарні точки визначаються з рівнянь:

$$\frac{n^{(s)} - n^{(e)}}{T} = 2Bn^{(s)}U^{(s)} \quad (2.21)$$

$$\frac{U^{(s)}}{\tau} = B\Delta E n^{(s)} U^{(s)}.$$

Система (2.21) має два розв'язки:

$$1) \quad n^{(1)} = n^{(e)}, \quad U^{(1)} = 0. \quad (2.22)$$

У цьому разі випромінювання відсутнє.

$$2) \quad n^{(2)} = (B\tau\Delta E)^{-1}, \quad U^{(2)} = \frac{n^{(e)} - (B\tau\Delta E)^{-1}}{2T} \tau\Delta E. \quad (2.23)$$

З дослідження рівнянь (2.19), (2.20) для випадку малих флуктуацій  $(n - n^{(e)} \approx e^{pt})$  запишемо такий вираз для декременту наростання  $p$ :

$$p_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{T} - \frac{1}{\tau} - 2BU^{(s)} + B\Delta E n^{(s)} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{T} - \frac{1}{\tau} - 2BU^{(s)} + B\Delta E n^{(s)} \right)^2 - 8B^2\Delta E n^{(s)} U^{(s)}} \right] \quad (2.24)$$

Підстановка в (2.24) значень особливих точок (2.22) і (2.23) показує, що розв'язок (2.22) є стійким (обидва значення  $p_{\pm}$  від'ємні), якщо  $n^{(e)} < (B\tau\Delta E)^{-1}$ , а розв'язок (2.23) стійкий, якщо  $n^{(e)} > (B\tau\Delta E)^{-1}$ .



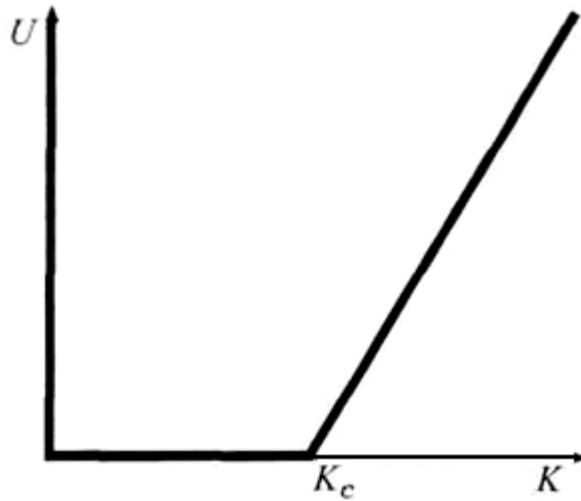


Рис. 2.4. Залежність інтенсивності лазерної генерації від накачування

Таким чином, при невеликих накачуваннях електромагнітне випромінювання відсутнє ( $U = 0$ ) з точністю до не досліджуваного нами спонтанного випромінювання). Зі зростанням накачування  $K$  величина  $n^{(e)}$  зростає і, коли  $n^{(e)}$  досягає деякого критичного значення, стійким стає другий розв'язок (2.23), для якого  $U \neq 0$ . Залежність енергії електромагнітного поля від накачування має вигляд, зображений на рис 2.4. Точка  $K = K_c = (2B\tau T\Delta E)^{-1} + \frac{1}{2}N\left(\frac{1}{T_{21}} - \frac{1}{T_{12}}\right)$  є точкою біфуркації і визначає поріг генерації в даній моделі. У точці біфуркації змінюється залежність  $U$  від  $K$ , а похідна  $\partial U / \partial K$  містить розрив. У разі виникнення генерації атоми починають випромінювати когерентно.

### 2.3. Бістабільність

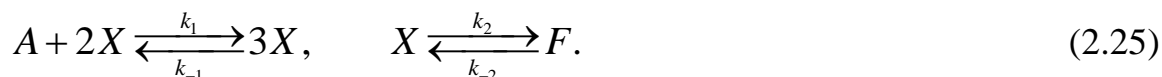
До бістабільних належать системи, які мають два стійких стани, між якими знаходиться нестійкий стан. Наявність кількох стабільних точок робить систему різноманітнішою порівняно з системою, що має один стійкий стан. Задачею теорії є визначення області параметрів, при яких наявна бістабільність, дослідження властивостей системи в різних стійких станах. При детерміністичному описі в стаціонарному випадку система, що виявилась в одній із стійких точок, буде знаходитися в ній як завгодно довго.

Процеси переходу між стійкими станами зумовлені флуктуаціями і будуть розглянуті окремо.

Існують численні приклади бістабільних систем у різних областях природознавства. Розглянемо явище на прикладах.

### 2.3.1. Бістабільність у хімічних реакціях

Розглянемо таку хімічну реакцію з однією змінною:



Реакцією описується автокаталітичне виробництво продукту  $X$  з речовиною  $A$  і його наступне перетворення в продукт  $F$ . При автокаталітичному процесі продукти реакції прискорюють саму реакцію. Перше рівняння (2.25) показує, що внаслідок взаємодії однієї молекули речовини  $A$  з двома молекулами компоненти  $X$  утворюються три молекули компоненти  $X$ . Існує також обернена реакція. Друге рівняння описує перетворення компоненти  $X$  в  $F$  і зворотний перехід  $k_1, k_2, k_{-1}, k_{-2}$  позначають швидкості реакцій (прямої та зворотної). Припустимо, що концентрація вихідної речовини  $A$  і продукту  $F$  підтримуються постійними. Позначимо число атомів речовини  $X$  через  $N_x$ , речовини  $A$  через  $N_A$ ,  $F$  — через  $N_F$ . Тоді рівняння, що описує реакцію, має вигляд:

$$\frac{dN_x}{dt} = k_1 N_A N_x^2 - k_{-1} N_x^3 - k_2 N_x - k_{-2} N_F \quad (2.26)$$

Введемо безрозмірні змінні  $X = \frac{k_{-1}}{k_1 N_A} N_x$ ,  $\tau = \frac{k_1^2 N_A^2}{k_{-1}} t$

Тоді з (2.26) матимемо

$$\frac{dX}{dt} = -X^3 + X^2 - \beta X + \gamma \quad (2.27)$$

де  $\beta = \frac{k_2 k_{-1}}{k_1^2 N_A^2}$ ;  $\gamma = \frac{k_{-2} k_{-1} N_F}{k^3 N_A^3}$ .

Стаціонарні точки визначаються з умови

$$\frac{dX}{dt} = -X^{(s)3} + X^{(s)2} - \beta X^{(s)} + \gamma = 0. \quad (2.28)$$

Залежно від  $\beta$  це рівняння має або три стаціонарні точки, або одну (в останньому випадку два інших розв'язки (2.28) є комплексними і їх потрібно відкинути, оскільки число атомів є дійсною величиною). Для аналізу розв'язків, використовуючи рівняння (2.28), зручно побудувати залежність  $\gamma(X^{(s)})$ . На рис. 2.5 цю залежність зображено для різних значень  $\beta$ . З рисунка видно, що при деякому значенні  $\beta$  при фіксованій величині  $\gamma$  існують три точки

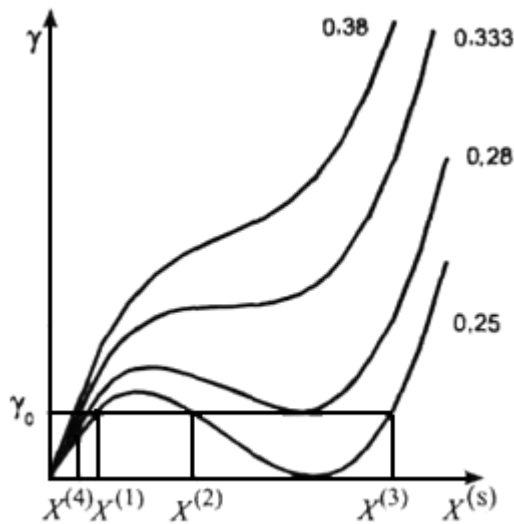


Рис. 2.5. Зв'язок критичних параметрів зі значенням критичних точок

$X^{(s)} \{X^1, X^2, X^3\}$ , для інших  $\beta$  – одне значення  $\{X^4\}$ .

Точка біфуркації може бути отримана з умови

$$-\frac{d\gamma(X^{(s)})}{dX^{(s)}} = -3X^{(s)^2} + 2X^{(s)} - \beta = 0.$$

Звідси маємо

$$X_c = \frac{1}{3} \left[ 1 \pm (1 - 3\beta)^{1/2} \right]. \quad (2.29)$$

У системі існує одна особлива точка при  $\beta > 1/3$ , і три точки при  $\beta < 1/3$ . Точка  $\beta = 1/3$  є точкою біфуркації (при цьому  $\gamma_c = 1/27$ ). При  $\beta < 1/3$  система бістабільна: існують дві стабільні точки і одна нестійка.

### 2.3.2. Тригер

Тригер — це бістабільна система, яка широко використовується в електронних пристроях. Він складається із спеціальним чином підключених двох підсилювачів (наприклад, напівпровідниковими тріодами або електронними лампами). Вольт-амперну характеристику окремого підсилювача наведено на рис. 2.6.

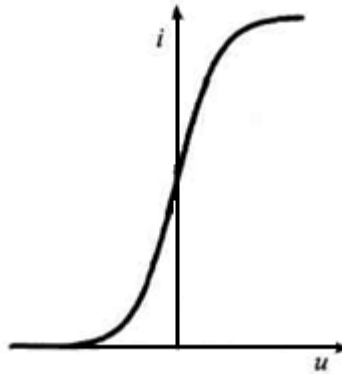


Рис. 2.6. Вольт-амперна характеристика підсилювача

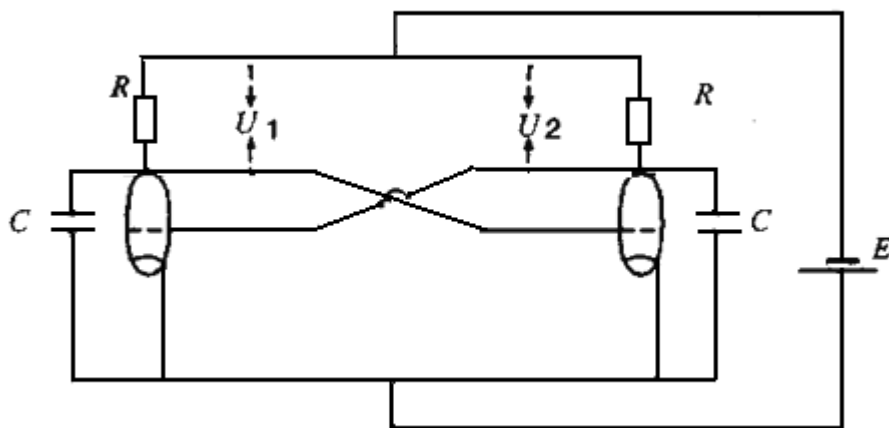


Рис. 2.7. Принципова схема тригера

Схема тригера (рис. 2.7) побудована так, що вихідний сигнал кожного підсилювача інвертується і з'єднується з входом другого, тобто, чим більший струм подається на один підсилювач, тим менший сигнал подається на інший. Таким чином, підсилювачі посиляють один одному гальмівні сигнали — кожен підсилювач примушує інший підтримувати протилежний стан. Тригер має два стійких стани: в одному стані через підсилювач 1 струм мінімальний, через підсилювач 2—

максимальний; у другому випадку, навпаки. Подаючи імпульс на один з підсилювачів, можна перевести систему з одного стану в інший.

Для отримання основних рівнянь розглянемо перший закон Кірхгофа для точок 1 і 2. Струм, пропущений через конденсатор  $C$ , становить  $i_c = dQ/dt = dU/dt C$ , струм, пропущений через опір,  $i_R = U/R$ , анодний струм позначимо через  $i$ . Тоді

$$-C \frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1}{R} - i_1 = 0. \quad (2.30)$$

Аналогічно для точки 2 матимемо:

$$-C \frac{dU_2}{dt} + \frac{U_2}{R} - i_2 = 0 \quad (2.31)$$

Залежність струму від напруги визначається формулою  $i = f(U)$ , або згідно з рис. 2.6 та 2.7  $i_1 = f(E - U_2)$ ,  $i_2 = f(E - U_1)$ .

Залежність  $f(U)$  зображена на рис. 2.6: зі зростанням напруги струм зростає, а при деякій напрузі спостерігається насичення.

Таким чином, вихідну систему (2.30), (2.31) можна переписати у вигляді

$$-C \frac{dU_1}{dt} = -\frac{U_1}{R} + f(E - U_2) \quad (2.32)$$

$$-C \frac{dU_2}{dt} = -\frac{U_2}{R} + f(E - U_1)$$

Стаціонарні стани визначаються умовами:

$$-\frac{U_1^0}{R} + f(E - U_2^0) = 0 \quad (2.33)$$

$$-\frac{U_2^0}{R} + f(E - U_1^0) = 0 \quad (2.34)$$

При визначеній залежності  $F(U)$  система (2.33) має один або три розв'язки. Один з розв'язків, який завжди існує, задовольняє умові

$$U_1^0 = U_2^0 = U^0.$$

де  $-\frac{U^0}{R} + f(E - U^0) = 0.$

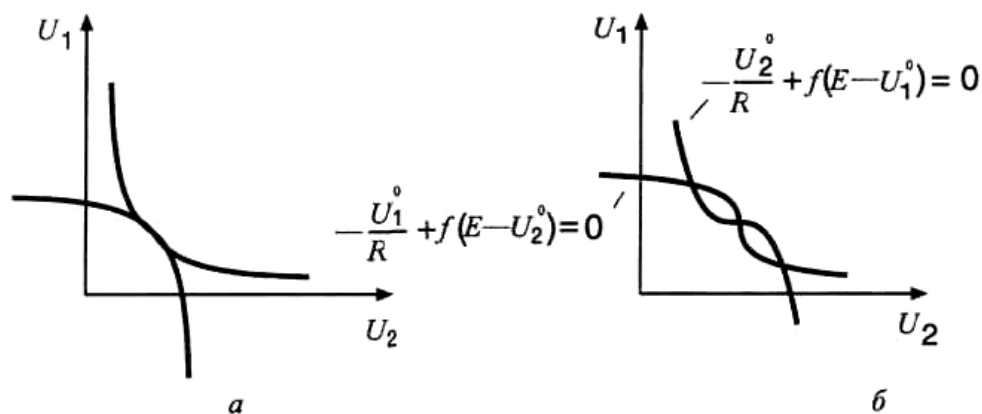


Рис. 2.8. Ізокліни для тригерної системи

Випадки, при яких реалізується одна або три особливі точки наведені на рис. 2.8, а і 2.8, б відповідно. На рисунках зображені головні ізокліни рівнянь (2.33), перетини яких визначають особливі точки. Точка біфуркації визначається умовою

$$R \left( \frac{\partial f(X)}{\partial X} \right)_{X=E-U^0} = 1$$

Якщо  $\left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{X=E-U^0} < \frac{1}{R}$ , рівняння (2.33) має один розв'язок, в інших випадках існують три розв'язки.

Для дослідження стійкості особливих точок покладемо

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1^0 + \delta U_1^0 e^{pt}, \\ U_2 &= U_2^0 + \delta U_2^0 e^{pt}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

З (2.32) отримуємо рівняння для  $p$

$$p = -\frac{1}{R} \pm \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{X=E-U_1^0} \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{X=E-U_2^0}}. \quad (2.36)$$

З (2.36) випливає, що коли система (2.33) має одну особливу точку  $\left( \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{X=E-U^0} < \frac{1}{R} \right)$ , то вона є стійким вузлом. Якщо  $\left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{X=E-U^0} > \frac{1}{R}$ , ця точка переходить в сідлову, проте в такому разі з'являються дві нові особливі точки, які є стійкими вузлами. Система може знаходитись в одному з цих стійких станів.

### 2.3.3. Оптична бістабільність

Інтерес до оптичної бістабільності зумовлений можливостями її практичного застосування в оптичних схемах логіки [19]. Система є оптично бістабільною, якщо при заданому зовнішньому оптичному опромінюванні вона

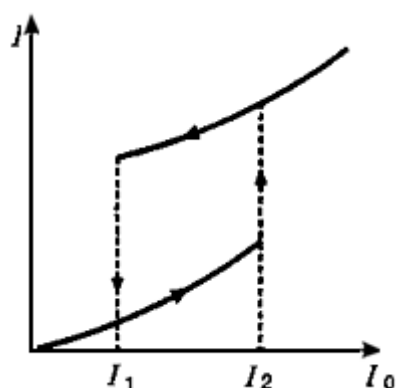


Рис. 2.9. Інтенсивність хвилі, що пройшла, від інтенсивності падаючої хвилі

має два стійких стани. На рис. 2.9 зображено характерну для бістабільних систем залежність інтенсивності світла, що пройшло через систему, від інтенсивності падаючого світла  $I_0$ . В області інтенсивностей  $I_1 < I_0 < I_2$  при заданому значенні  $I_0$  існують два значення інтенсивності сигналу, що пройшов через систему.

Розглянемо простий приклад. У більшості випадків основним елементом для оптично бістабільних систем є резонатор Фабрі – Перо, заповнений нелінійним середовищем (тобто з параметрами, залежними від інтенсивності випромінювання) (рис.2.10). Напруженість електричного і магнітного полів усередині середовища визначається відомим розв’язком задачі про проходження електромагнітної хвилі через плоскопаралельну пластинку. Вважатимемо, що коефіцієнт поглинання  $\alpha$

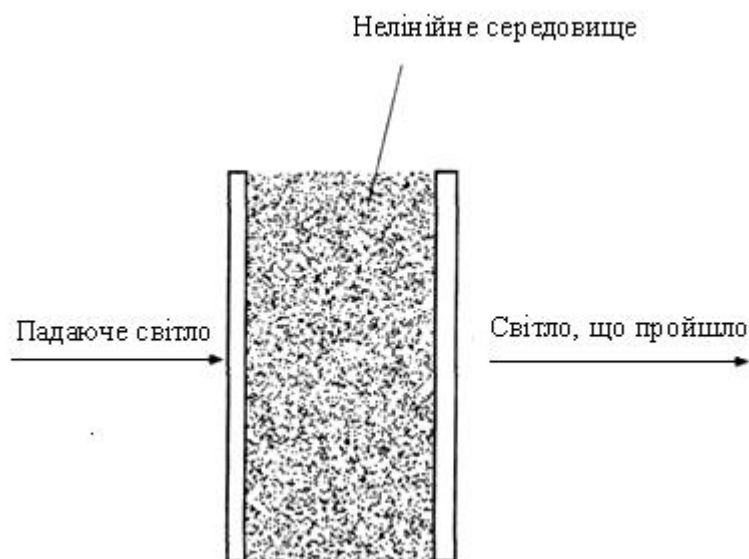


Рис. 2.10. Принципова схема спостереження оптичної бістабільності

середовища задовольняє умові  $\alpha L \ll 1$ , де  $L$  – товщина пластинки. Тоді для інтенсивності випромінювання в середині резонатора, усереднений по віддалі, рівній довжині електромагнітної хвилі, має місце співвідношення:

$$I = I_0 \frac{1 - R^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2\omega n L / c)} \quad (2.37)$$

де  $R$  — коефіцієнт відбивання світла від дзеркал резонатора;  $n$  — показник заломлення світла речовини всередині резонатора;  $\omega$  — частота коливань електромагнітних хвиль.

Останній доданок у знаменнику (2.37) описує інтерференцію електромагнітних хвиль всередині резонатора. В нелінійних середовищах показник заломлення залежить від інтенсивності електромагнітного поля, тобто,  $n \equiv n(I)$ , тому рівняння (2.37) є складним трансцендентним рівнянням для визначення  $I$ . Припустимо, що показник заломлення  $n$  повільно залежить від  $I$  і його можна розкласти в ряд за степенями  $I$ :

$$n(I) = n_0 + n_2 I \quad (2.38)$$

де  $n_0$  і  $n_2$  — сталі.

На рис. 2.11 наведено графічний розв'язок системи (2.37), (2.38). Прямая лінія відповідає рівнянню (2.38), залежність  $I(n)$ , що випливає з (2.37)

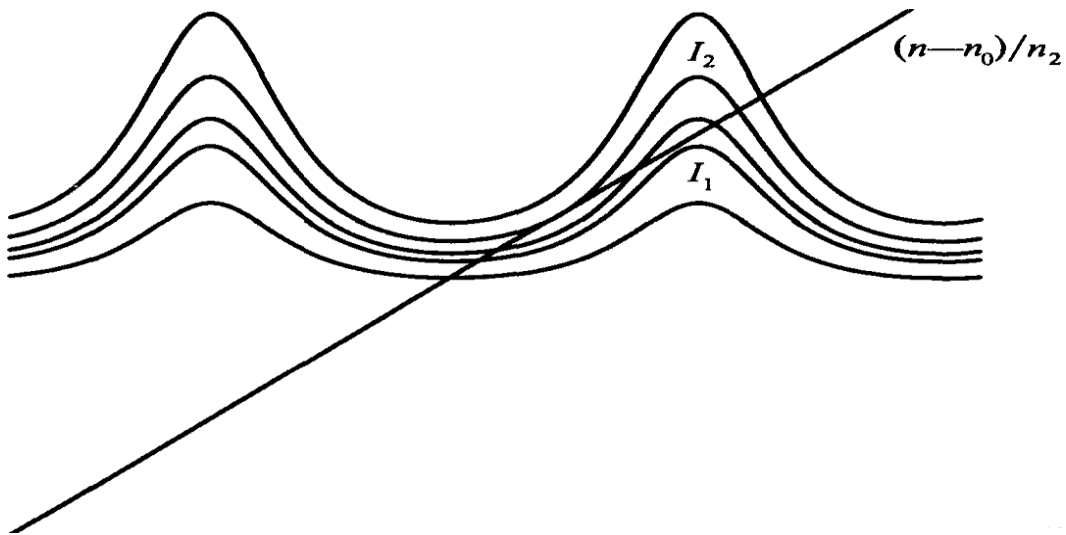


Рис. 2.11. Графічний розв'язок рівняння

для різних значень  $I_0$  зображена періодичними функціями. Для кривих, які відповідають значенням  $I_0 < I_1$ , і  $I_0 > I_2$ , існує одна точка перетину і отже, один розв'язок. В області  $I_1 < I_0 < I_2$  існують три розв'язки, два з яких є стійкими. У цій області спостерігається оптична бістабільність.



## 2.4. Уявлення про теорію катастроф

Розглянемо градієнтну систему, в якій права частина вихідних рівнянь (1.4) може бути представлена у вигляді похідної від деякої функції  $V(X, \lambda)$  (формула(1.63)). Стаціонарні точки, що визначаються з умови  $\partial V / \partial X_i = 0$ , відповідають локальним екстремумам  $V$ , і  $V$  відіграє роль, подібну до ролі потенціалу. Біфуркація спостерігається, коли декремент  $p$  перетинає дійсну вісь ( $p = 0$ ) і згідно з (1.18) виконується умова

$$\det \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right| = \left| \frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial X_j} \right| = 0 \quad (2.39)$$

Зі зміною зовнішніх параметрів відбувається зміна числа особливих точок, замість одного екстремуму може виникнути два і т. д. Для біфуркаційних точок (ліній, поверхонь) у просторі параметрів Том запропонував назву «катастрофічні» [20]. В околі катастрофічних областей малі зміни параметрів зумовлюють різку зміну поведінки системи. Томом визначена класифікація можливих «катастроф». Проаналізуємо втрату структурної стійкості при зміні зовнішніх параметрів на прикладі одновимірної системи.

Розкладемо потенціал  $V(X)$  у ряд

$$V(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + fX^5 + \dots \quad (2.40)$$

У стаціонарній точці  $\partial V / \partial X = 0$ , отже,  $b = 0$ . Для структурно-стійкого стану, тобто  $\partial^2 V / \partial^2 X > 0$ , тобто  $c > 0$ , для структурно-нестійкого стану  $\partial^2 V / \partial^2 X < 0$  і, отже,  $c < 0$ . Тому при зміні структурної стійкості (у точці біфуркації)  $c = 0$ . Таким чином, у точці біфуркації  $b = c = 0$ , а при малих збуреннях  $b$  і  $c$  є малими і головним доданком в (2.40) є член розкладу, що починається з третього ступеня  $X(dX^3)$  або більш високої, якщо  $d = 0$ . За допомогою трьох перетворень (вибором початку координат, зсувом координат уздовж осі  $X$  і масштабу для  $X$ ) можна зменшити число параметрів в (2.40), так можна покласти  $a = c = 0, d = 1$ . Тоді

$$V(X) = X^3 + \lambda X \quad (2.41)$$

Доданки з більш високими степенями  $X$  є малими при малих  $X$ .  $\lambda$  в (2.41) є зовнішнім параметром, що дорівнює нулю в точці біфуркації,

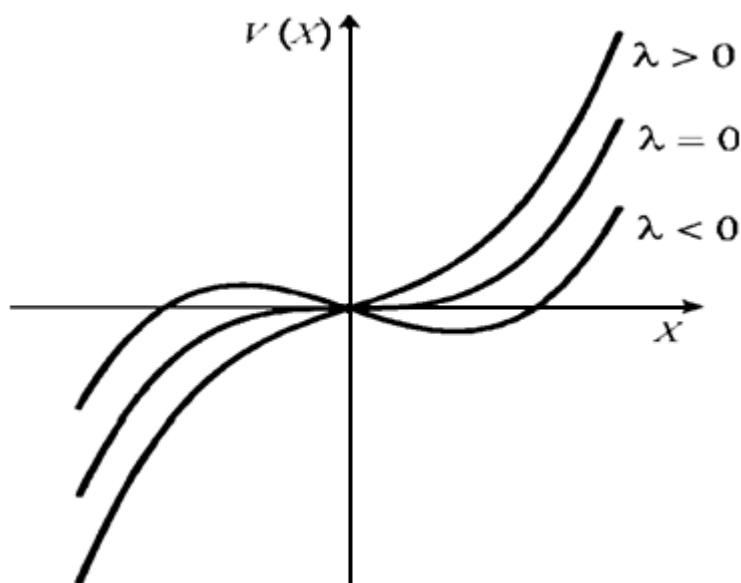


Рис. 2.12. Потенціал з одним параметром

Залежність потенціалу  $V(X)$  для різних значень  $\lambda$  зображена на рис.2.12. Система не має особливих точок при  $\lambda > 0$  і має дві особливі точки  $X^{(s)} = \pm(-\lambda/3)^{1/2}$  при  $\lambda < 0$ , при цьому точка  $(-\lambda/3)^{1/2}$  є стійкою, точка  $-(-\lambda/3)^{1/2}$  — нестійка. Таким чином, у системі, яка при  $\lambda > 0$  не має особливих точок, при  $\lambda < 0$  з'являються дві особливі точки, одна з яких стійка. Така «катастрофа» називається катастрофою складки.

Якщо  $\tilde{n} = d = 0$ , головним членом у розкладі (2.40) в околі особливої точки є доданок  $eX^4$ . При цьому доданки  $a + bX + cX^2 + dX^3$  є малими і розглядаються як збурення. Подібно до попереднього випадку, підібравши відповідним чином початок відліку для  $V(X)$ , масштаб для  $X$  і положення початку координат, можна надати потенціалу вигляду:

$$V(X) = X^4 + \lambda_1 X^2 + \lambda_2 X \quad (2.42)$$

де  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  — біфуркаційні параметри. Умову для стаціонарних точок:

$$4X^{(s)3} + 2\lambda_1 X^{(s)} + \lambda_2 = 0 \quad (2.45)$$

З (2.43) випливає, що залежність  $\lambda_2$  від  $X^{(s)}$  ( $\lambda_2 = -4X^{(s)} - 2\lambda_1 X^{(s)}$ ) визначається співвідношенням типу (2.41) і описується кривими, зображеннями на рис. 2.12. З рисунка видно, що залежно від

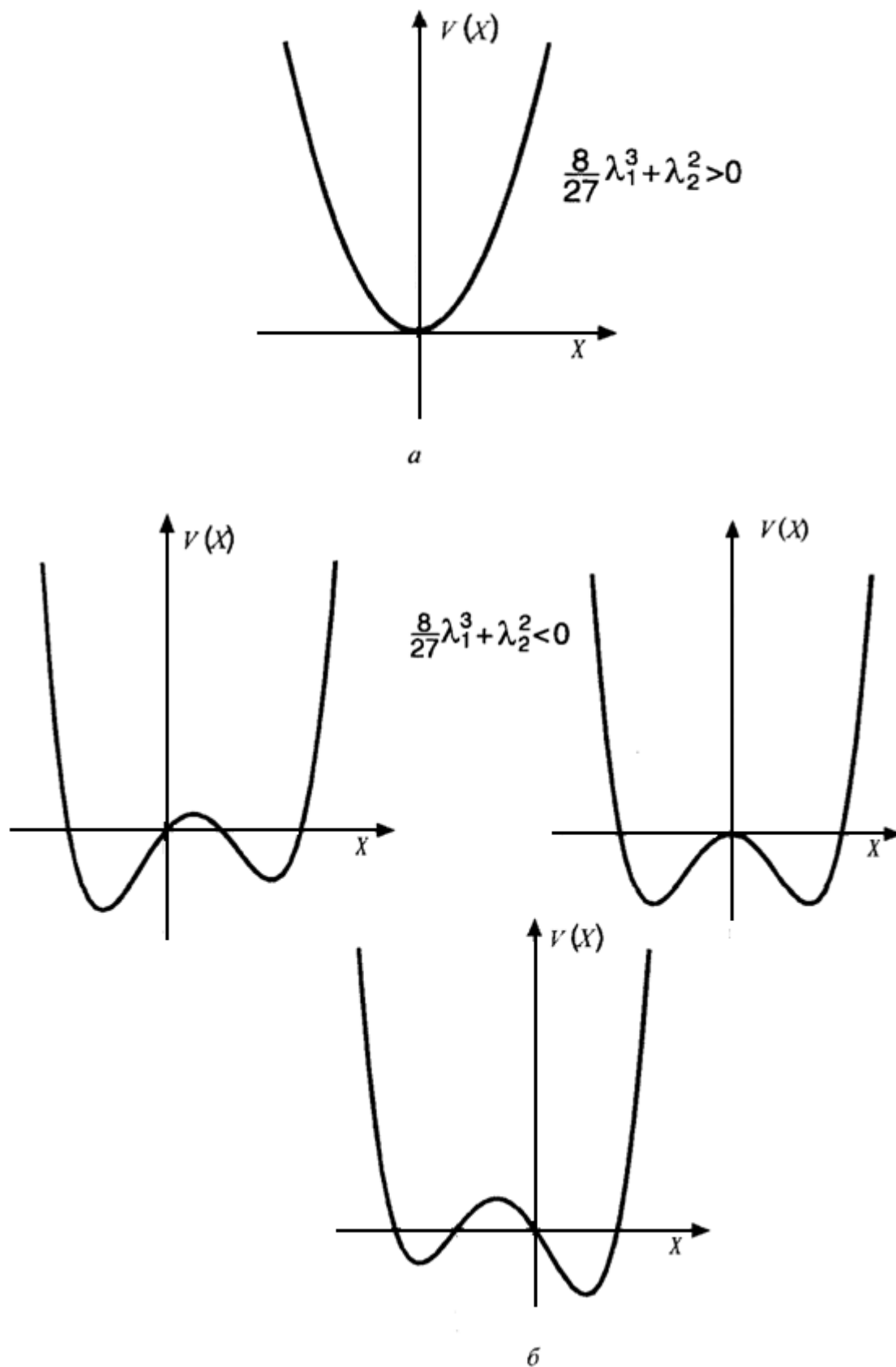


Рис. 2.13. Потенціал з двома параметрами

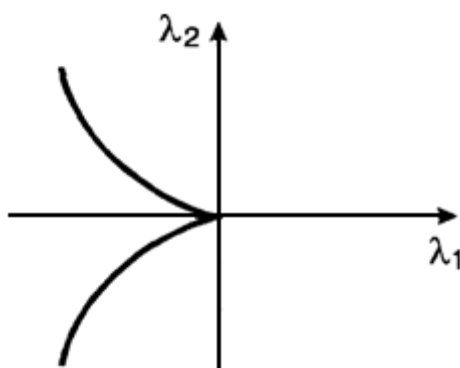


Рис.2.14. Класифікація особливих точок у просторі зовнішніх параметрів

$\lambda_1$ , і  $\lambda_2$  можливе існування одного або трьох розв'язків (горизонтальні прямі з різними значеннями  $\lambda_2$  перетинають криві з різними  $\lambda_1$  один раз або тричі). Точка  $\frac{\partial \lambda_2}{\partial X^{(s)}} = 12X_c^{(s)^2} + 2\lambda_1 = 0$  розділяє області, в яких існують один або три розв'язки. Підставивши знайдене звідси значення  $X_c = (-\lambda_1 / 6)^{1/2}$  в (2.43), отримаємо умову для біфуркаційної лінії. Якщо  $\frac{8}{27}\lambda_1^3 + \lambda_2^2 > 0$ , то в системі з потенціалом (2.42) реалізується один мінімум, якщо  $\frac{8}{27}\lambda_1^3 + \lambda_2^2 < 0$  існують три екстремуми, два з яких є мінімумами. Залежність потенціалу  $X$  для різних значень  $\lambda_1$ , і  $\lambda_2$  зображена на рис. 2.13, а, б. Залежно від значень параметрів мінімумами відрізняються за величиною (див. рис. 2.13, б). Точки, що відповідають мінімумам є стійкими.

Простір параметрів  $\lambda_1$ , і  $\lambda_2$  можна поділити на області з різним числом і характером особливих точок (рис.2.14). Область у правій частині від суцільної лінії відповідає області параметрів, при яких існує один мінімум (одна особлива точка), область в лівій частині відповідає значенням параметрів, при яких реалізуються два мінімуми (дві стійкі особливі точки). Суцільна лінія є біфуркаційною кривою або катастрофічною множиною. Біфуркаційна крива для розглядуваної системи називається “збіркою”.

Якщо в (2.40) також  $e = 0$ , то головним доданком  $fX^6$ , а потенціал при параметрах, близьких до біфуркаційних, за допомогою операцій, подібних до виконаних у попередніх випадках, може бути приведений до вигляду:

$$V(X) = X^5 + \lambda_1 X^3 + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X \quad (2.44)$$

Особлива точка визначається з умови:

$$5X^{(s)4} + 3\lambda_1 X^{(s)2} + 2\lambda_2 X^{(s)} + \lambda_3 = 0 \quad (2.45)$$

Зі зміною параметрів число мінімумів і максимумів змінюється. У множині параметрів  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ця зміна відбувається на біфуркаційних поверхнях. Для потенціалу (2.44) ці поверхні мають вигляд, зображений на рис. 2.15. Катастрофа розглядуваного типу називається «хвіст ластівки» завдяки формі біфуркаційних поверхонь.

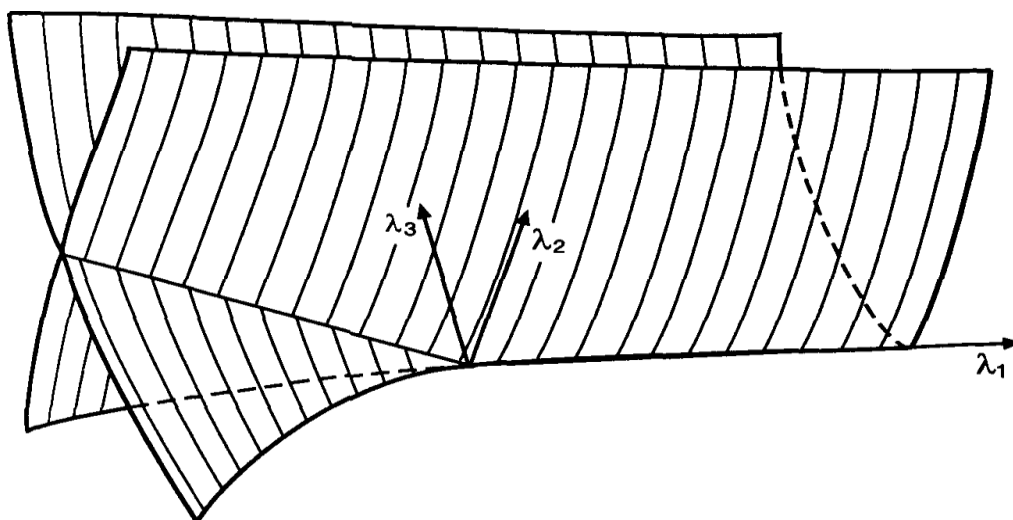


Рис. 2.15. Біфуркаційна поверхня катастрофи типу «хвіст ластівки»

Так само, але складнішим чином, можна здійснити дослідження для систем більшої розмірності. Виявляється, що коли число параметрів системи не більше за чотири, то поведінка системи довільної розмірності може бути описана одним із чотирьох потенціалів, розглянутих Томом. Потенціали наведено в таблиці. У разі, якщо число параметрів становить не більше чотирьох, число катастроф незалежно від розмірності не перевищує семи.

Потенціал	Назва катастрофи
$X^3 + \lambda X$	складка
$X^4 + \lambda_1 X^2 + \lambda_2 X$	збірка
$X^5 + \lambda_1 X^3 + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X$	хвіст ластівки
$X^6 + \lambda_1 X^4 + \lambda_2 X^3 + \lambda_3 X^2 + \lambda_4 X$	метелик
$X_1^2 + X_2^2 + \lambda_1 X_1 X_2 - \lambda_2 X_2 - \lambda_3 X_1$	гіперболічна омбіоліка
$X_2^2 - 3X_2^2 X_1^2 + \lambda_1 (X_1^2 + X_2^2) - \lambda_2 X_2 - \lambda_3 X_1$	еліптична омбіоліка
$X_2^2 X_1 + X_1^2 + \lambda_1 X_2^2 + \lambda_2 X_1^2 - \lambda_3 X_2 - \lambda_4 X_1$	параболічна омбіоліка

## ***2.5. Аналогія між рівноважними та нерівноважними фазовими переходами***

Нерівноважні фазові переходи мають багато спільного з термодинамічно-рівноважними фазовими переходами. При фазовому переході система, яка складається з макроскопічно великої кількості взаємодіючих частинок, зазнає різкої перебудови при малих змінах зовнішніх параметрів. Перебудова відбувається внаслідок колективності руху частинок. Побудова теорії фазових переходів є однією із складних проблем теоретичної фізики.

При фазових переходах стрибкоподібно змінюються значення першої похідної або похідних вищого порядку від вільної енергії за температурою або відповідним зовнішнім параметром. Прикладами термодинамічних фазових переходів є переходи з кристалічного стану в рідкий, з рідкого в газоподібний, з феромагнітного в парамагнітний, переходи між різними кристалічними станами. Для математичного феноменологічного опису фазових переходів вводять термодинамічну змінну — параметр порядку. Звичайно параметром порядку є фізична величина, яка є чутливою до фазового переходу. Так, наприклад, при розгляді переходу рідина — газ параметром порядку є густина частинок, для феромагнетиків — намагніченість, для сегнетоелектричних фазових переходів — спонтанна поляризація тощо. Температура фазового переходу  $T_c$  є точкою неаналітичності параметра порядку як функції температури. Неаналітичність

функції  $\eta(T)$  означає, що функція не може бути представлена у вигляді ряду по степенях  $T - T_c$ . Визначення залежності  $\eta(T)$  в околі  $T_c$  від температури та інших параметрів (тиску, напруженостей електричного й магнітного полів та інших) є однією з найважливіших задач теорії. Згідно з теорією Ландау і Халатнікова [21] параметр порядку задовольняє такому рівнянню:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\Gamma \frac{d\Phi}{d\eta} \quad (2.46)$$

де  $\Phi$  — вільна енергія; коефіцієнт  $\Gamma$  повільно залежить від температури, і надалі ми цією залежністю будемо нехтувати.

Основне припущення теорії фазових переходів Ландау [22] полягає в тому, що поблизу точки фазового переходу вільна енергія може бути розкладена в ряд по степенях параметра порядку. Для фазових переходів другого роду цей розклад має вигляд:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2}a\eta^2 + \frac{1}{4}b\eta^4, \quad (2.47)$$

де  $a$  і  $b$  — у загальному випадку деякі функції температури, у малій області в околі температури фазового переходу припускається, що їх можна розкласти в ряд по степенях  $T - T_c$  і обмежитись найнижчими членами розкладу, при цьому коефіцієнт  $b$  не залежить від температури, а  $a$  визначається формулою:

$$\begin{aligned} a &= \alpha(T - T_c), \\ \alpha &> 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Конкретний зміст параметра порядку залежить від розглядуваного фазового переходу, наприклад, для фазового переходу феромагнетик — парамагнетик  $\eta$  є намагніченість.

З (2.46) і (2.47) випливає, що в стаціонарному випадку

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = a\eta_0 + b\eta_0^3 = 0 \quad (2.49)$$

В області температур  $T < T_c$  існують два розв'язки

$$\eta_0 = \left[ -\frac{\alpha}{b}(T - T_c) \right]^{1/2} \quad (2.50)$$

$$\eta_0 = 0, \quad (2.51)$$

причому реалізується розв'язок (2.50), при якому вільна енергія має мінімум.

При  $T > T_c$  рівняння (2.49) має один розв'язок  $\eta_0 = 0$ .

Залежність параметра порядку від температури є неаналітичною. Вона має різний вигляд при  $T < T_c$  і  $T > T_c$ . Крім того, похідна  $\partial\eta/\partial T$  є розбіжною при  $T \rightarrow T_c$ . Подібна зміна функціональних залежностей зовнішнього параметра поблизу точок біфуркації спостерігалася нами в попередніх підрозділах для кінетичних фазових переходів.

Зображення вільної енергії у вигляді (2.47) відповідає фазовим переходам другого роду. Для фазових переходів першого роду ця залежність є більш складною і зумовлює існування в певній області температур двох значень параметра порядку, при яких вільна енергія має мінімум. Тому система може знаходитись в одному з двох станів подібно до явища бістабільності в кінетичних фазових переходах. Стан з більш високим значенням термодинамічного потенціалу називається метастабільним. Зі зміною температури метастабільний стан може стати стабільним, а стабільний метастабільним. Температура, при якій вільні енергії двох станів збігаються, називається температурою фазового переходу. Аналогічна конкуренція екстремумів відбувається при зміні біфуркаційних параметрів (див. рис. 2.13). Таким чином, ми знову спостерігаємо подібність рівноважних і нерівноважних фазових переходів.

Розглянемо залежність від часу процесів релаксації флуктуацій при температурах, близьких до температури фазового переходу. Нехай в системі при  $T < T_c$  відбувається мале відхилення параметра порядку від рівноважного значення. Покладемо  $\delta\eta = \eta - \eta_0$ . Тоді згідно з рівнянням (2.46) при  $T \rightarrow T_c$  залежність параметра порядку від часу визначається формулами:

$$\begin{aligned} \delta\eta &= \delta\eta(0) \exp(-2\Gamma\alpha(T_c - T)t) \quad \text{при } T < T_c, \\ \delta\eta &= \delta\eta(0) \exp(-\alpha(T - T_c)t) \quad \text{при } T > T_c. \end{aligned} \quad (2.52)$$

З наведеного розв'язку видно, що релаксація флуктуацій параметра порядку при температурах, близьких до температури фазового переходу, відбувається



надзвичайно повільно. Отже, спостерігається критичне уповільнення релаксації флуктуацій.

Подібне явище має місце в нерівноважних процесах. У підрозділі 1.7 показано, що в околі біфуркаційних точок релаксація системи відбувається нескінченно довго.

Теорія Ландау має обмежену область застосування. Проте більш строгі теорії, зокрема точні розв'язки модельних задач теорії фазових переходів, показують [23, 24] наявність неаналітичної поведінки параметра порядку, в околі точки переходу він може бути зображений у вигляді:

$$\eta \approx \left[ \frac{T - T_c}{T_c} \right]^\beta \quad (2.53)$$

де  $\beta$  називається критичним індексом, зокрема в теорії Ландау  $\beta = \frac{1}{2}$ .

Рівноважний фазовий перехід може відбутися не лише зі зміною температури, а також з повільною зміною інших параметрів, наприклад, тиску при фіксованій температурі. Фазовий перехід у цьому разі відбувається при певному (критичному) значенні зовнішнього параметра, а в точці фазового переходу спостерігається зміна функціональної залежності параметра порядку від зовнішнього параметра.

З короткого переліку властивостей рівноважних фазових переходів і розглянутих раніше кінетичних фазових переходів можна виявити глибоку аналогію між ними, а саме:

- 1) переходи спостерігаються при критичних значеннях зовнішніх параметрів;
- 2) спостерігається неаналітична залежність параметрів, що визначають властивості системи, від зовнішніх параметрів;
- 3) відбувається уповільнення процесів у часі в околі переходів.

Проте рівноважні фазові переходи затиснуто в рамки рівноважних процесів, тому нерівноважні переходи набагато різноманітніші та яскравіші за властивостями, ніж рівноважні.